

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
АСТРОНОМИЧЕСКИЙ СОВЕТ

# ПРОБЛЕМЫ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

*Доклады на Конференции  
по общим и прикладным вопросам  
теоретической астрономии*

*Москва 20—25 ноября 1961 г.*

БИБЛИОТЕКА  
ИНСТИТУТА КОСМИЧЕСКИХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ АН СССР

-28342-

8

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР  
МОСКВА—1963

Амплитуда  $G'$  имеет порядок  $\sqrt{J_2}$ , и

$$\sin g' = \sin g_0 \operatorname{sn} \{\beta(t - t_0), \sin g_0\},$$

$$G' = G'_0 + B \sin g_0 \operatorname{cn} \{\beta(t - t_0), \sin g_0\},$$

где  $\operatorname{sn}$  — эллиптическая функция Якоби,  $\beta$  имеет порядок  $c\sqrt{J_2^3}$ , а  $B$  — порядок  $c\sqrt{J_2}$ .

На граничных кривых движения асимптотически приближаются к неустойчивым особым точкам или асимптотически удаляются от них. Долгота перигея не может изменяться на  $2\pi$ , если движению соответствует область, внутренняя по отношению к граничным кривым. В противоположном случае перигей может изменяться обычным образом.

Мы еще детально не изучали взаимное влияние возмущений, обусловленных сопротивлением атмосферы, сжатием и другими факторами. Но если изменить постоянные, входящие в аналитические периодические выражения, как выше сделано для возмущений от сжатия и лунно-солнечных возмущений, в соответствии с вековыми изменениями, обусловленными сопротивлением атмосферы, то появится возможность достаточно хорошо описывать движение до тех пор, пока эффект сопротивления атмосферы не превышает члены второго порядка. Для вычисления вековых возмущений следует пользоваться численным интегрированием путем изменения постоянных.

#### Литература

1. Spec. Rept. Smithsonian Astrophys. Observ., 1960, 41.
2. Y. Kozai. Spec. Rept. Smithsonian Astrophys. Observ., 1961, 92.
3. I. G. Izsak. Astron. J., 65, 1960, 6.
4. P. Musen. J. Geophys. Res., 65, 1960, 3.
5. Y. Kozai. Spec. Rept. Smithsonian Astrophys. Observ., 1961, 56.
6. Y. Kozai. Spec. Rept. Smithsonian Astrophys. Observ., 1959, 22.
7. P. Musen, A. Bailie, E. Upton. Nation. Aeronaut. Space Admin., Technic. Note, D-494, 1961.
8. W. Kaula. Nation. Aeronaut. Space Admin., Technic Note, D-1126, 1961.
9. Y. Kozai, G. Whitney. Spec. Rept. Smithsonian Astrophys. Observ., 1959, 30.
10. P. Musen. J. Geophys. Res., 66, 1961, 9.
11. Y. Kozai. Astron. J., 65, 1960, 10.
12. W. Kaula. Geophys. J., 5, 1961, 2.
13. Y. Kozai. Astron. J., 64, 1959, 9.
14. И. Д. Жонголович. Бюлл. ИТА, 7, 1960, 10.
15. Y. Kozai. Astron. J., 66, 1961, 3.
16. D. Brouwer. Astron. J., 64, 1959, 5.
17. H. Zeipel. Ark. Astr. Math. Fys., 1916, 11.
18. Smithsonian Contrib. Astrophys., 1961, 5.

М. Л. Лидов

#### О ПРИБЛИЖЕННОМ АНАЛИЗЕ ЭВОЛЮЦИИ ОРБИТ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ

§ 1. Известные в классической небесной механике методы приближенного исследования ограниченной проблемы трех тел, путем осреднения возмущающих ускорений [1], приобретают большое значение для задач, связанных с искусственными спутниками. При этом для таких задач оказываются очень полезными как качественная картина эволюции, которую удается получить из осредненных уравнений, так и приближенные количественные оценки по упрощенным формулам.

В настоящее время с помощью быстродействующих электронно-вычислительных машин можно вычислить эволюцию отдельных орбит искусственных спутников на значительном интервале времени численным интегрированием точной системы дифференциальных уравнений. Сравнение этих решений с результатами, полученными по приближенным формулам, является достаточно надежной практической оценкой точности приближенных уравнений. Такое сравнение, наряду с оценками по порядкам пренебреженных величин, позволяет получать выводы о применимости приближенных уравнений для рассмотрения эволюции определенного класса орбит.

Для многих практических задач, связанных с искусственными спутниками, требуется получить оценки изменения элементов на ограниченном интервале времени с сравнительно невысокими точностями. Это позволяет использовать приближенные уравнения для широкого класса орбит искусственных спутников. Последнее в свою очередь стимулирует детальное изучение приближенных осредненных уравнений.

Здесь мы не будем рассматривать более точную схему осреднения за один или несколько оборотов, позволяющую получить формулы для расчета изменения элементов в зависимости от последовательных оборотов спутника и формулы, описывающие изменение элементов орбиты внутри одного оборота возмущающего тела. Эта задача рассмотрена в работе автора [2].

Если изменения элементов внутри одного оборота возмущающего тела оказываются достаточно малыми, то практически применима схема (во всяком случае для качественных оценок) независимого двухкратного осреднения возмущающих ускорений по среднему движению самого спутника и среднему движению возмущающего тела. При этом изменение элементов орбиты спутника на интервале осреднения в теории первого приближения не учитывается при получении эволюционных уравнений.

**§ 2. Постановка задачи.** Рассматривается задача эволюции орбиты спутника в следующей постановке:

а) Спутник обращается около центрального тела с осесимметричным гравитационным потенциалом  $V$ , который определен формулой:

$$\begin{aligned} V &= \frac{fM}{r} - \frac{fM\delta}{3r^3} (3\sin^2\psi - 1); \\ \delta &= R^2 \left( \alpha - \frac{m}{2} \right); \quad m = \frac{\Omega^2 R}{g_R}; \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\psi$  — широта точки, отсчитываемая от плоскости гравитационной симметрии, которую будем называть плоскостью экватора;

$R$  — экваториальный радиус центрального тела;

$\alpha$  — сжатие этого тела;

$\Omega$  — его угловая скорость собственного вращения;

$g_R$  — ускорение силы тяжести на экваторе,

$f$  — гравитационная постоянная.

б) Спутник испытывает возмущение внешней гравитирующей точки с массой  $M_b$ , обращающейся по эллиптической орбите с малым эксцентриситетом  $e_b$  и периодом  $T_b$ .

в) Максимальное удаление спутника от центрального тела  $r_{\max}$  много меньше, чем величина полуоси  $a_b$  орбиты возмущенного тела. Возмущающие ускорения рассматриваются в первом приближении по величине  $\frac{r_{\max}}{a_b} \ll 1$ .

Сформулированная постановка задачи после двойного осреднения приводит к следующей системе эволюционных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dn} &= 0; \\ \frac{de}{dn} &= -(1 - \varepsilon) \varepsilon^{1/2} \sin^2 i \sin 2\omega; \\ \frac{di}{dn} &= -\frac{1}{2} \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon^{1/2}} \sin i \cos i \sin 2\omega + \beta \frac{\sin I \sin \Omega_0 \cos i_{\text{ЭКВ}}}{\varepsilon^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dn} &= -\frac{\cos i}{\varepsilon^{1/2}} \left[ (1 - \varepsilon) \sin^2 \omega + \frac{\varepsilon}{5} \right] + \\ &+ \beta \frac{\cos i \sin I \cos \Omega_0 - \sin i \cos I}{\sin i \varepsilon^2} \cos i_{\text{ЭКВ}}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dn} &= \frac{(\cos^2 i - \varepsilon) \sin^2 \omega + \frac{2}{5} \varepsilon}{\varepsilon^{1/2}} + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\varepsilon^2} \left( 5 \cos^2 i_{\text{ЭКВ}} - \right. \\ &\left. - 1 - 2 \frac{\sin I \cos \Omega_0}{\sin i} \cos i_{\text{ЭКВ}} \right). \end{aligned}$$

$$\cos i_{\text{ЭКВ}} = \cos i \cos I + \sin i \sin I \cos \Omega;$$

$$n = AN;$$

$$A = \frac{15}{2} \pi \frac{M_b}{M} \left( \frac{a}{a_b} \right)^3 \varepsilon_b^{-3/2}; \quad (3)$$

$$\beta = \frac{4}{15} \frac{\delta a_b^3 \varepsilon_b^{3/2}}{a^5} \left( \frac{M}{M_b} \right);$$

$$\varepsilon = 1 - e^2, \quad \varepsilon_b = 1 - e_b^2.$$

Здесь  $M$  — масса центрального тела,  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  — общепринятые обозначения для элементов орбиты искусственного спутника. Угловые элементы отсчитываются от плоскости орбиты возмущающего тела. Положение узла  $\Omega$  отсчитывается от нисходящего узла орбиты возмущающего тела на плоскости экватора;  $I$  — наклонение плоскости экватора к плоскости орбиты возмущающего тела,  $N$  — порядковый номер оборота спутника.

Кроме тривиального интеграла  $a = \text{const}$  рассматриваемая система обладает интегралом [1]:

$$W = \text{const},$$

где  $W$  — дwoякоосредненный полный потенциал возмущающих ускорений нецентральности основного поля и внешней притягивающей точки.

В рассматриваемом приближении этот интеграл имеет вид:

$$(1 - \varepsilon) \left( \frac{2}{5} - \sin^2 \omega \sin^2 i \right) + \frac{\varepsilon \cos^2 i}{5} + \frac{\beta}{\varepsilon^{3/2}} \left( \cos^2 i_{\text{ЭКВ}} - \frac{1}{3} \right) = \text{const}. \quad (4)$$

§ 3. Возмущение гравитирующей точки. В случае  $\beta = 0$  система уравнений (2) имеет три интеграла:

$$\begin{aligned} a &= \text{const}, \\ \varepsilon \cos^2 i &= c_1, \\ (1-\varepsilon)\left(\frac{2}{5} - \sin^2 \omega \sin^2 i\right) &= c_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Область возможных значений констант  $c_1$  и  $c_2$  представлена на рис. 1.

В случае  $c_2 > 0$  аргумент широты перицентра  $\omega$  монотонно возрастает:

$$\delta\omega > 0.$$

При этом  $\varepsilon$  и  $i$  испытывают колебания.

Максимальное  $\varepsilon_{\text{max}}$  и минимальное  $\varepsilon_{\text{min}}$  значения реализуются при  $\sin 2\omega = 0$  и определяются формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{max}} &= 1 - \frac{5}{2} c_2, \\ \varepsilon_{\text{min}} &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{5}{3} (c_1 + c_2) - \sqrt{\left[ 1 + \frac{5}{3} (c_1 + c_2) \right]^2 - \frac{20}{3} c_1} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Соответствующие экстремальные значения для наклона определяются из второго интеграла (5) в виде:

$$\begin{aligned} (\cos^2 i)_{\text{min}} &= \frac{c_1}{\varepsilon_{\text{max}}}, \\ (\cos^2 i)_{\text{max}} &= \frac{c_1}{\varepsilon_{\text{min}}}. \end{aligned}$$

В случае  $c_2 < 0$  аргумент широты перигея  $\omega$  также изменяется в ограниченных пределах. Экстремальные значения  $\omega_{\text{экстр}}$  находятся из соотношений:

$$\sin^2 \omega_{\text{экстр}} = \frac{2}{1 - c_1/\varepsilon^{*2}}, \quad (7)$$

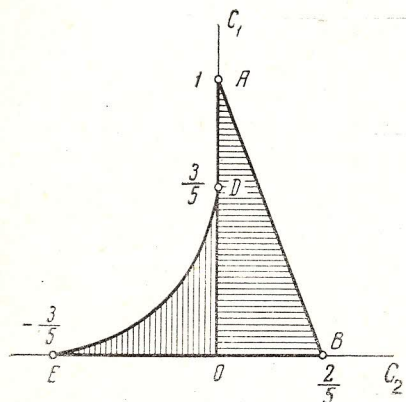


Рис. 1. Область возможных значений констант  $c_1$  и  $c_2$

где  $\varepsilon^*$  определяется из уравнения

$$-\left(c_2 + \frac{2}{5} c_1\right) (\varepsilon^*)^2 + \frac{4}{5} c_1 \varepsilon^* - c_1 \left(\frac{2}{5} - c_2\right) = 0 \quad (8)$$

и условия  $0 \leq \varepsilon^* \leq 1$ .

Два значения  $\omega_{\text{min}}$  и  $\omega_{\text{max}}$  получаем как два корня уравнения (7), симметричных относительно  $\frac{\pi}{2}$  (если  $\omega_0 \in (\omega_1^*, \omega_3^*)$ ) или  $\frac{3}{2}\pi$  (в случае, если начальное  $\omega_0 \in (\omega_4^*, 2\pi + \omega_2^*)$ ). Здесь и в дальнейшем введены обозначения для особых значений  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \omega_1^* &= \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{5}; \quad \omega_2^* = -\omega_1^*; \\ \omega_3^* &= \pi - \omega_1^*; \quad \omega_4^* = \pi + \omega_1^*. \end{aligned} \quad (9)$$

В случае  $c_2 < 0$  экстремальные значения  $\varepsilon_{\text{экстр}}$  являются двумя корнями квадратного уравнения

$$\varepsilon_{\text{экстр}}^2 - \left[ 1 + \frac{5}{3} (c_1 + c_2) \right] \varepsilon_{\text{экстр}} + \frac{5}{3} c_1 = 0. \quad (10)$$

Зависимости экстремальных значений  $\varepsilon$  и  $\omega$  от констант  $c_1$  и  $c_2$  представлены на рис. 2, 3, 4.

В случае, если

$$e_{\text{max}} = \sqrt{1 - \varepsilon_{\text{min}}} > 1 - \frac{R}{a},$$

происходит падение спутника на центральное тело.

Граница области допустимых значений констант соответствует ряду предельных случаев (см. рис. 1):

1. Линия  $AB$ , где

$$c_2 = \frac{2}{5} (1 - c_1)$$

отвечает случаю, когда начальное наклонение  $i_0$  равно 0 или  $180^\circ$ .

В этом случае  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , широта перицентра  $\varphi$ , отсчитываемая от плоскости орбиты возмущающего тела, также не изменяется и равна нулю.

Долгота перицентра  $\alpha$  меняется со скоростью

$$\frac{d\alpha}{dn} = \pm \frac{1}{5} \varepsilon_0^{1/2} \quad (11)$$

(знак плюс соответствует  $i_0 = 0$ , а знак минус  $i_0 = 180^\circ$ ).

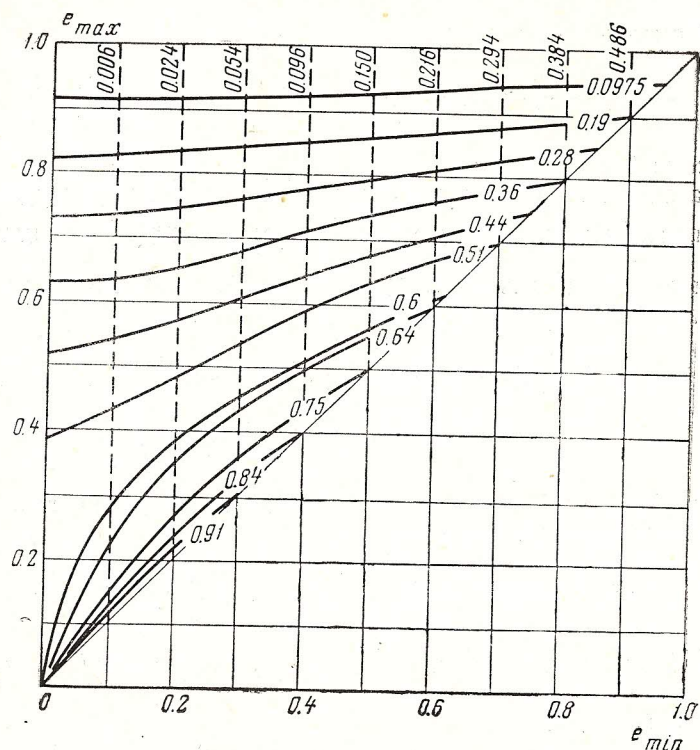


Рис. 2. Связь между экстремальными значениями эксцентриситета при различных значениях  $c_1$  (сплошные линии) и  $c_2 > 0$  (штриховые линии).

Цифры около линий показывают соответствующие значения постоянных  $c_1$  и  $1.5 c_2$ .

## 2. Линия ED

$$c_2 = -\frac{3}{5} \left( 1 - \sqrt{\frac{5}{3} c_1} \right)^2$$

отвечает специальным начальным данным:

$$\sin^2 \omega_0 = 1, \quad \cos^2 i_0 = \frac{3}{5} \varepsilon_0.$$

В этом случае

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \quad i = i_0, \quad \varphi = \varphi_0,$$

и эволюция сводится к повороту орбиты около нормали к плос-

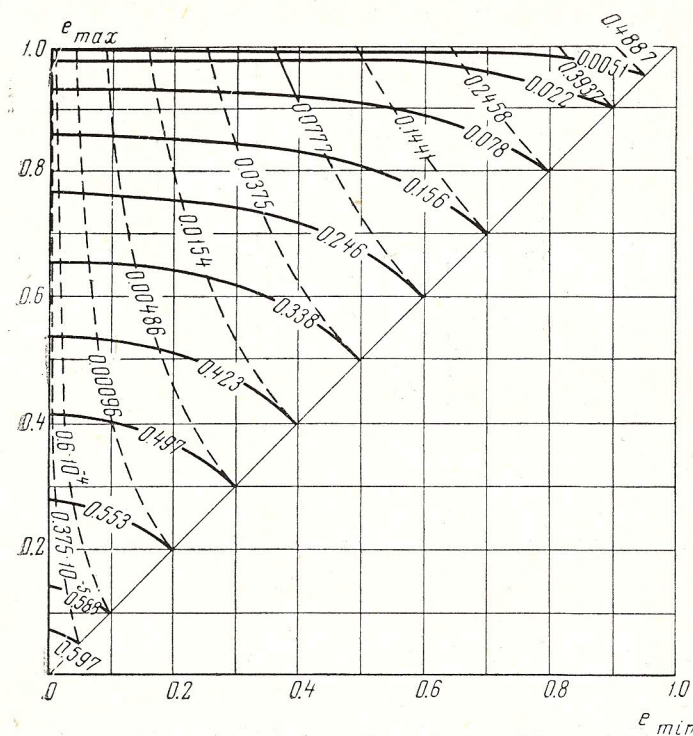


Рис. 3. Связь между экстремальными значениями эксцентриситета при различных значениях  $c_1$  (сплошные линии) и  $c_2 < 0$  (штриховые линии).

Цифры около линий показывают соответствующие значения постоянных  $c_1$  и  $c'_2 = -c_2$ .

кости орбиты возмущающего тела со скоростью:

$$\frac{d\alpha}{dn} = \pm \frac{1}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \left( \frac{12}{3} \varepsilon_0 - 3 \right) \quad (12)$$

(«+» при  $\cos i_0 > 0$ , «-» при  $\cos i_0 < 0$ ).

3. Линия OA соответствует случаю, когда

$$\sin^2 \varphi_0 = \sin^2 i_0 \sin^2 \omega_0 = \frac{2}{5}.$$

Здесь  $\omega \rightarrow \omega_3^*$  [если  $\omega_0 \subset (\omega_3^*, \omega_1^*)$ ] или  $\omega \rightarrow \omega_2^*$  [если  $\omega_0 \subset (\omega_4^*, 2\pi + \omega_2^*)$ ], при этом орбита стремится к круговой  $e \rightarrow 0$ .

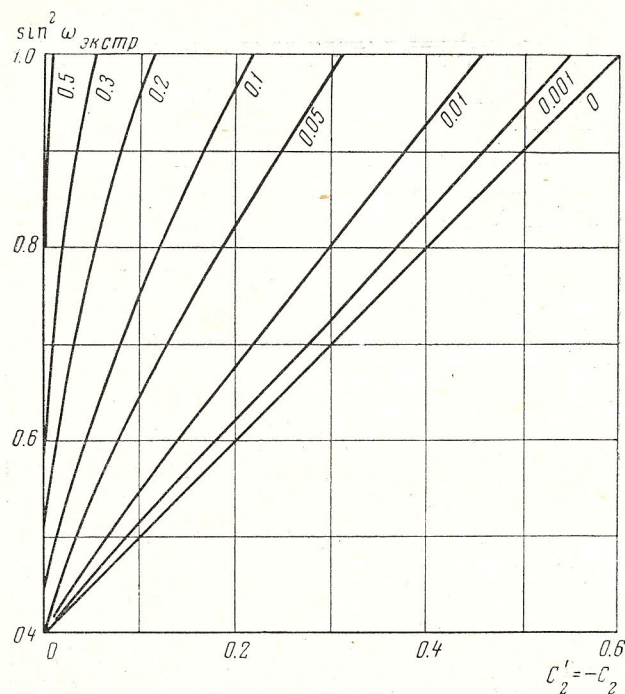


Рис. 4. Зависимость  $\sin^2 \omega_{\text{экстр}}$  от  $c_2 < 0$  при различных значениях  $c_1$ .

Цифры около линий показывают соответствующие значения  $c_1$ .

Если  $\omega_0 < \frac{\pi}{2}$  (или соответственно  $\omega_0 < \frac{3}{2}\pi$ ), то в процессе эволюции имеется локальный максимум эксцентриситета, определяемый формулой:

$$e_{\text{max}} = \sqrt{1 - \frac{5}{3} \varepsilon_0 \cos^2 i_0}. \quad (13)$$

4. Линия  $BE$  соответствует случаю, когда начальное наклонение  $i_0$  равно  $90^\circ$ . При этом  $i = 90^\circ = \text{const}$ .

В процессе эволюции  $\omega$  стремится к особым значениям  $\omega_1^*$  [в случае, если  $\omega_0 \in (\omega_2^*, \omega_3^*)$ ], либо  $\omega \rightarrow \omega_4^*$  [если  $\omega_0 \in (\omega_3^*, 2\pi + \omega_2^*)$ ].

При этом эксцентриситет орбиты стремится к единице. Для центрального тела радиуса  $R$  падение на поверхность произойдет

при  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$  и  $\omega = \tilde{\omega}$ , где  $\tilde{\varepsilon}$  и  $\tilde{\omega}$  определяются формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} &= 1 - \left(1 - \frac{R}{a}\right)^2, \\ 5 \cos 2\tilde{\omega} - 1 &= \frac{(1 - \varepsilon_0)(5 \cos 2\omega_0 - 1)}{(1 - \tilde{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (14)$$

Если  $\sin 2\omega_0 < 0$ , то в процессе эволюции имеет место локальный минимум эксцентриситета при  $\sin 2\omega = 0$ . Величина  $e_{\text{min}}$  определяется по формулам:

при  $\cos 2\omega_0 > \frac{1}{5}$

$$e_{\text{min}}^2 = \frac{e_0^2 (5 \cos 2\omega_0 - 1)}{4},$$

при  $\cos 2\omega_0 < \frac{1}{5}$

$$e_{\text{min}}^2 = \frac{e_0^2 (1 - 5 \cos 2\omega_0)}{6}.$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче при наклонении орбиты к плоскости орбиты возмущающего тела, равном  $90^\circ$ , хотя и возможно в определенных условиях временное уменьшение эксцентриситета, в конечном счете эксцентриситет становится столь большим при постоянной полуоси орбиты, что происходит падение спутника на центральное тело.

Этот случай интересен как предельный случай для достаточно больших наклонений.

При этом в окрестности  $i_0 = 90^\circ$  существует непрерывная зависимость  $e_{\text{max}}$  от  $i_0$ .

На рис. 5 изображена схема эволюции орбиты в случае  $i_0 = 90^\circ$ . В квадрантах системы координат отмечен знак изменения высоты перигея. Кроме того, нанесены пунктирные линии, отмечающие особые значения аргумента широты перигея  $\omega_j^*$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Стрелками между пунктирными линиями указано направление изменения  $\omega$  в зависимости от положения перигея.

Зависимость величины  $\omega$  от времени  $t$  для орбиты с наклонением, равным  $90^\circ$ , определяется по формулам:

$$\begin{aligned} t &= \frac{2\pi}{\sqrt{jM}} a^{3/2} N, \\ N &= \frac{a_N}{A} [\delta F(\varphi, k^2) - \delta_0 F(\varphi_0, k^2)], \end{aligned} \quad (15)$$

где  $A$  — согласно (3),  $F$  — эллиптический интеграл 1-го рода,

$$\delta = 1 \text{ при } \sin 2\omega > 0, \delta = -1 \text{ при } \sin 2\omega < 0,$$

$$\delta_0 = 1 \text{ при } \sin 2\omega_0 > 0, \delta_0 = -1 \text{ при } \sin 2\omega_0 < 0.$$

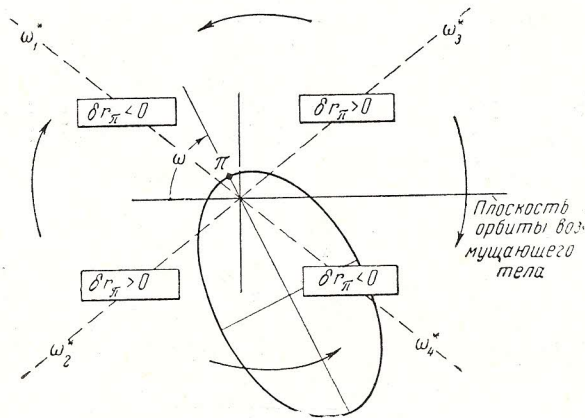


Рис. 5. Эволюция орбиты, наклоненной к плоскости орбиты возмущающего тела под  $90^\circ$

Величины  $\varphi_0$ ,  $\varphi$ ,  $k^2$  и  $a_N$  (см. табл.) определяются по различным формулам в зависимости от знака интеграла  $c = e_0^2(5\cos 2\omega_0 - 1)$ .

	$c > 0$	$c < 0$
$b$	$\frac{c+1}{5}$	$\frac{c+1}{5}$
$a_N$	$2 \left[ \frac{4(1+b)}{5} \right]^{-\frac{1}{2}}$	$2 \left[ \frac{6(1-b)}{5} \right]^{-\frac{1}{2}}$
$\sin \varphi_0$	$\left[ \frac{(1+b)(1-\cos 2\omega_0)}{(1-b)(1+\cos 2\omega_0)} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[ \frac{(1-b)(1+\cos 2\omega_0)}{(1+b)(1-\cos 2\omega_0)} \right]^{\frac{1}{2}}$
$\sin \varphi$	$\left[ \frac{(1+b)(1-\cos 2\omega)}{(1-b)(1+\cos 2\omega)} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[ \frac{(1-b)(1+\cos 2\omega)}{(1+b)(1-\cos 2\omega)} \right]^{\frac{1}{2}}$
$k^2$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{1-b}{1+b}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1+b}{1-b}$

Время жизни спутника в зависимости от начальных данных определяется по формуле (15) при  $\omega = \tilde{\omega}$ , где  $\tilde{\omega}$  согласно (14).

В случае, если начальное значение  $\omega_0 = \omega_1^*$ , либо  $\omega_0 = \omega_4^*$ , то время жизни спутника вычисляется по элементарной формуле:

$$t = \frac{2\pi}{\sqrt{fM}} a^{3/2} N, \quad (16)$$

где

$$N = \frac{5}{\sqrt{24}} \frac{1}{A} \ln \left[ \frac{(1 + \sqrt{1 - e_0^2})(1 - \sqrt{1 - \tilde{e}^2})}{(1 - \sqrt{1 - e_0^2})(1 + \sqrt{1 + \tilde{e}^2})} \right],$$

$$\tilde{e} = 1 - \frac{R}{a}.$$

**§ 4. Влияние нецентральности гравитационного поля.** Справедливость приведенного в предыдущем разделе вывода о падении спутников на центральное тело при наклонении плоскости орбиты спутника к плоскости орбиты возмущающего тела, близком к  $90^\circ$ , была проверена численным интегрированием точной системы уравнений для нескольких орбит искусственных спутников Луны.

Однако практическая достоверность этого приближенного заключения, вообще говоря, могла бы быть поставлена под сомнение существованием в природе спутников Урана. Спутники Урана обращаются по экватору планеты, причем наклонение экватора Урана к его орбите составляет  $98^\circ$ , т. е. плоскости орбит спутников Урана наклонены к плоскости орбиты возмущающего тела — Солнца под углом близким к  $90^\circ$ .

Мы покажем, что учет возмущений за счет нецентральности гравитационного поля Урана может объяснить в рамках системы уравнений (2) стационарность эксцентриситета орбиты этих спутников.

Несколько идеализируя задачу, положим в системе (2)  $i = 90^\circ$ ,  $i = 90^\circ$ . В этом случае система уравнений (2) преобразуется к виду:

$$\frac{da}{dn} = 0; \quad \frac{di}{dn} = 0; \quad \frac{d\Omega}{dn} = 0;$$

$$\frac{de}{dn} = -(1 - e) \varepsilon^{1/2} \sin 2\omega; \quad (17)$$

$$\frac{d\omega}{dn} = \varepsilon^{1/2} \left( \frac{2}{5} - \sin^2 \omega \right) + \frac{\beta}{\varepsilon^2}.$$

Интеграл (4) после аналогичной подстановки запишется в виде:

$$(1 - \varepsilon) \left( \frac{2}{5} - \sin^2 \omega \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{\beta}{\varepsilon^{3/2}} = c. \quad (18)$$

Характерное поведение интегральных кривых в плоскости  $(\omega, \varepsilon)$  в случае  $0 < \beta < \frac{3}{5}$  представлено на рис. 6. Стрелками указано

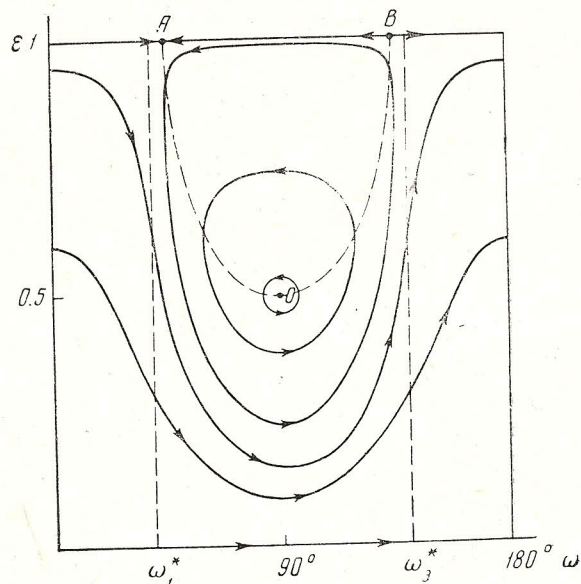


Рис. 6. Интегральные кривые для случая  $0 < \beta < \frac{3}{5}$

направление эволюции. На рисунке нанесены пунктирные кривые — кривая вертикальных касательных  $AOB$ , уравнение которой имеет вид:

$$\varepsilon = \left( \frac{\beta}{\sin^2 \omega - \frac{2}{5}} \right)^{\frac{2}{5}}, \quad (19)$$

и особые значения для случая  $\beta = 0$ :

$$\omega = \omega_1^* \text{ и } \omega = \omega_3^*.$$

Точка  $O$  представляет стационарное решение

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \left( \frac{5}{3} \beta \right)^{\frac{2}{5}}; \quad \omega = \omega_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Если  $\beta \rightarrow 0$ , то кривая (19) стремится заполнить весь прямоугольник, ограниченный пунктирными вертикальными линиями, и минимальное значение  $\varepsilon$  стремится к нулю, т. е. максимальное в процессе эволюции значение эксцентриситета приближается к единице и реализуется падение спутника на центральное тело.

Если  $\beta > \frac{3}{5}$ , то точки либрации  $O$  в плоскости  $(\varepsilon, \omega)$  не будет.

В случае  $\beta \neq 0$  максимальные и минимальные значения эксцентриситета определяются из уравнений:

При а)  $\beta > \frac{3}{5}$  и б)  $\beta < \frac{3}{5}$ ,  $c > \frac{2}{3} \beta$ .

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} e_{\min}^2 + \frac{2}{3} \frac{\beta}{(1 - e_{\min}^2)^{3/2}} &= c, \\ -\frac{3}{5} e_{\max}^2 + \frac{2}{3} \frac{\beta}{(1 - e_{\max}^2)^{3/2}} &= c. \end{aligned} \quad (20)$$

При с)  $\beta < \frac{3}{5}$ ,  $c < \frac{2}{3} \beta$  экстремальные значения эксцентриситета находятся как два корня уравнения

$$-\frac{3}{5} e_{\text{экстр}}^2 + \frac{2}{3} \frac{\beta}{(1 - e_{\text{экстр}}^2)^{3/2}} = c.$$

Для максимально возмущаемого Солнцем наиболее далекого от планеты спутника Урана Оберон можно получить приближенную оценку для величины  $\beta$ .

Полагая, что гравитационный потенциал поля Урана может быть приближен формулой (1), получим после подстановки приближенных значений всех параметров

$$\beta \approx 91.$$

Для больших значений  $\beta$  и малых значений эксцентриситета амплитуда колебаний будет, согласно (20), приближенно равна

$$e_{\max} - e_{\min} \approx \frac{1}{2\beta} e_{\min},$$



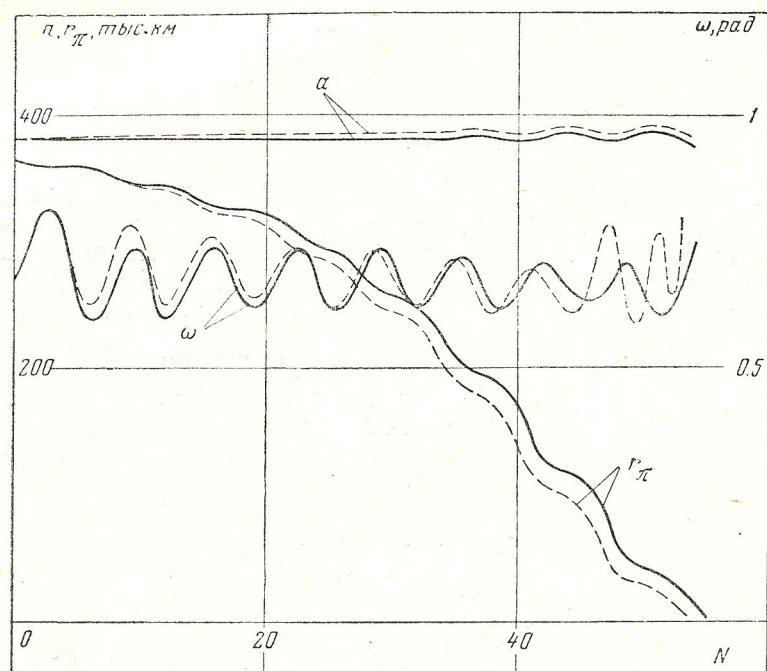


Рис. 7. Эволюция элементов орбиты спутника ( $\alpha$ ,  $r_{\pi}$  и  $\omega$ ) в зависимости от порядкового номера оборота

т. е. для спутника Урана ( $e \approx 0,001$ ) долго-периодические колебания эксцентриситета могут составлять величину порядка  $10^{-5}$ .

Существенное изменение характера эволюции при учете нецентральнойности основного поля не является типичным для спутников планет Солнечной системы.

В качестве другого примера, где сжатие не влияет на качественные выводы, полученные из уравнений при  $\beta=0$ , нами рассмотрена эволюция орбиты спутника Земли, полуось и эксцентриситет которой соответственно равны полуоси и эксцентриситету орбиты Луны. При этом принималось наклонение орбиты спутника к плоскости эклиптики равным  $90^\circ$ .

Для рассматриваемого спутника параметр  $\beta = 0,2 \cdot 10^{-4}$ . Если начальное значение  $\omega_0 = \omega_1^* = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{5}$ , то время

существования такого спутника можно оценить по формуле (16).

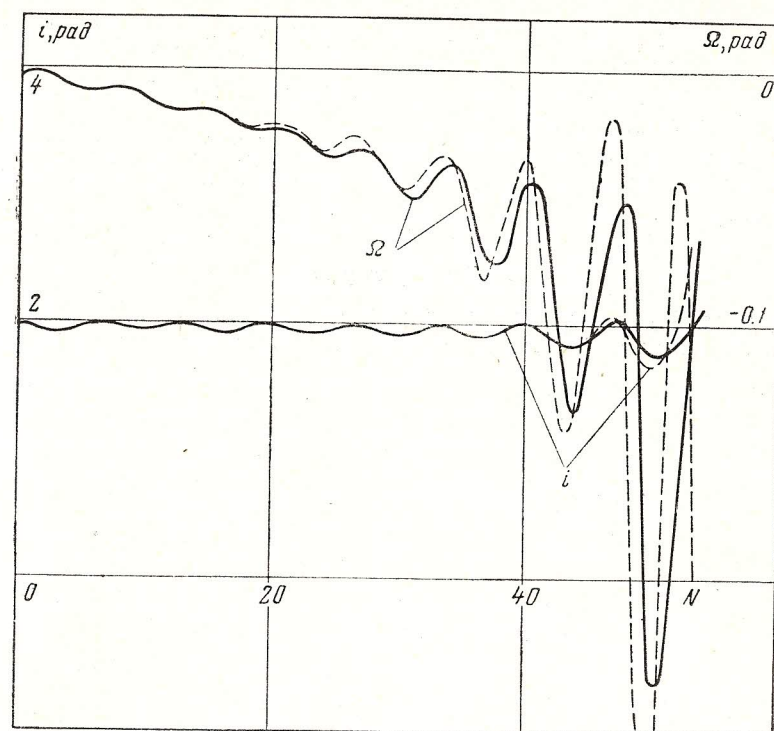


Рис. 8. Эволюция элементов орбиты спутника ( $i$ ,  $\Omega$ ) в зависимости от порядкового номера оборота

Оценки по формуле (16) показывают, что такой спутник мог бы совершить только 52 оборота, т. е. существовал бы на орбите примерно 4 года.

Точные оценки времени существования такой «Луны» были получены численным интегрированием системы дифференциальных уравнений совместного движения Земли, Солнца и спутника с учетом нецентральнойности земного гравитационного поля.

Эволюция элементов орбиты в зависимости от порядкового номера оборота представлена на рис. 7 и 8 сплошными линиями. При этом вместо эксцентриситета орбиты вычислялось  $r_{\pi}$  — минимальное расстояние на данном обороте. Для сравнения пунктирными линиями нанесены те же зависимости, полученные с помощью приближенных дифференциальных уравнений, однократно осредненных за оборот спутника [2].

В точном решении минимальное расстояние орбиты спутника стало меньше радиуса Земли через 55 оборотов. При расчете по однократно осредненным уравнениям время существования составляет 54 оборота.

Приведенный пример иллюстрирует эффективность приближенных формул не только с качественной, но и количественной стороны.

#### Литература

1. Н. Д. Моисеев. Тр. ГАИШ, 15, 1945, 1.
2. М. Л. Лидов. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 8, М., 1961.

У. М. Каула

(США)

#### АНАЛИЗ ОРБИТ СПУТНИКОВ ДЛЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЦЕЛЕЙ

Трудности точного определения положений следящих станций и вариаций земного гравитационного поля Земли из орбит близких спутников рассматриваются как состоящие из следующих частных проблем:

- 1) неравномерное распределение наблюдений;
- 2) несовершенство математической модели атмосферы;
- 3) большое количество требуемых вычислений;
- 4) плохая обусловленность, т. е. различные параметры оказывают почти одинаковое влияние на орбиту.

Методы, представляющие собой попытки решения этих проблем, проверяются на вычислительной машине IBM 7090.

Любой анализ изменений орбит спутников для выявления геодезических эффектов не дает хороших результатов, пока не будет получено точное решение для гравитационной гармоники  $U_2^1$ , которая должна быть практически равна нулю, как известно из наблюдений за колебаниями широт.

Трудности проблемы, рассматриваемой в этой статье, характерны не для небесной механики, где нужно получить точное математическое описание явления, физические законы которого по существу известны, а скорее для геофизики, где приходится анализировать неполные и недостаточно хорошо распределенные наблюдения и использовать математическую модель, которая не полностью описывает физическую сторону явления. В нашем случае недостаточно точно можно описать взаимодействие спутника со средой, в которой он движется.

Как хорошо известно, долго-периодические и вековые изменения орбит спутников позволили получить значительно улучшенные значения коэффициентов зональных гармоник в гравитационном поле Земли. Более трудной проблемой является определение коэффициентов тессеральных гармоник поля вместе с координатами станций; эта проблема не может быть решена отдельно от других проблем по причинам, описанным ниже.